ANEXO C

C.1. FORMULA PARA EL CÁLCULO DE COLUMNAS CORTAS

El laboratorio de productos Forestales de Madison (Wisconsin), desarrolló una formula de cuarto grado para el calculo de columnas de madera de esbeltez intermedia y de sección rectangular. Esta formula es:

$$\sigma_U = \sigma_B * \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{L}{d * \lambda_O} \right)^4 \right] \qquad (1)$$

en donde:
σ_U = Esfuerzo admisible a compresión.
σ_B = Esfuerzo básico en compresión paralela a la fibra.
L = Longitud de la columna.
d = Menor dimensión transversal.
λ_O = Relación de esbeltez límite entre las columnas intermedias y las largas, para un determinado valor de contenido de humedad.

Es importante observar que esta formula es también utilizada para el calculo de columnas cortas, ya que el error que se comete es muy pequeño. Debido a que en secciones circulares no se puede hablar de menor dimensión transversal, es necesario transformar la ecuación (1) en otra donde aparezca la relación de esbeltez real de la columna.

La relación de esbeltez esta definida como el cociente entre la longitud de la probeta (L) y su radio de giro (r), es decir:

$$\lambda = \frac{L}{r} \qquad (2)$$

En columnas rectangulares el radio de giro esta dado por la expresión:

$$r = \frac{d}{\sqrt{12}} \qquad (3)$$

entonces, la relación L/d de la ecuación (1) será:

$$\frac{L}{d} = \frac{L}{r\sqrt{12}} \qquad (4)$$

Reemplazando (4) en (1) se obtiene entonces, la formula de cuarta potencia para columnas cortas de sección transversal anular:

$$\sigma_U = \sigma_B * \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\lambda}{\lambda_O \sqrt{12}}\right)^4\right] \qquad (5)$$

El valor λ_O es la abscisa del punto de tangencia entre la grafica de la ecuación (5) y la de la formula de Euler, es decir, donde las derivadas con respecto a λ son iguales.

Derivando la ecuación (5) se tiene entonces:

$$\frac{\partial \sigma_U}{\partial \lambda} = \sigma_B \left[-\frac{4}{3}\frac{\sqrt{12}}{\left(\sqrt{12}\right)^3 * 12}\frac{\lambda^3}{{\lambda_O}^4}\right] \qquad (6)$$

$$\frac{\partial \sigma_U}{\partial \lambda} = -\frac{4}{3}\sigma_B \left[\frac{1}{\sqrt{12}}\right]^4 \frac{\lambda^3}{{\lambda_O}^4} \qquad (7)$$

Derivando ahora a formula de Euler:

$$\sigma_U = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \qquad (8)$$

se obtiene:

$$\frac{\partial \sigma_U}{\partial \lambda} = \frac{-2\pi^2 E}{\lambda^3} \qquad (9)$$

Igualando (7) con (9):

$$-\frac{4}{3}\sigma_B \left[\frac{1}{\sqrt{12}}\right]^4 \frac{\lambda^3}{{\lambda_O}^4} = \frac{-2\pi^2 E}{\lambda^3} \qquad (10)$$

Transponiendo términos se llega a:

$$\frac{\sigma_B}{3} = \left[\frac{\lambda}{\lambda_O \sqrt{12}}\right]^4 = \frac{\pi^2 E}{2\lambda^2} \qquad (11)$$

Como el valor de σ_U es el mismo en el punto de tangencia de las dos curvas, entonces se igualan (5) y (8), así:

$$\sigma_B - \frac{\sigma_B}{3} * \left(\frac{\lambda}{\lambda_O \sqrt{12}}\right)^4 = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \qquad (12)$$

o también:

$$\sigma_B = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} + \frac{\sigma_B}{3} * \left(\frac{\lambda}{\lambda_O \sqrt{12}} \right)^4 \qquad (13)$$

Reemplazando (11) en (13):

$$\sigma_B = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} + \frac{\pi^2 E}{2\lambda^2} \qquad (14)$$

$$\sigma_B = \frac{3}{2} \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \qquad (15)$$

Despejando de (15):

$$\lambda = \lambda_O = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\left(2/3\right) * \sigma_B}} \qquad (16)$$

que es el valor de la relación de esbeltez, donde las curvas son tangentes, es decir, el límite entre las columnas cortas y las largas.